Université Ibn Tofail - ENSA - Kénitra
Filière : CPI 2

Année universitaire : 2019/2020
Semestre 4

Variables aléatoires continues

Feuille de TD n^0 5 :

Exercice 1

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer $t>0$ tel que $P(-t<X<t)\simeq 0,95$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(8,4)$. Donner des valeurs approchées pour
$$P(X<7,5),\ P(X>8,5),\ P(6,5<X<10),\ P(X>6|X>5).$$
3. Soit X une variable aléatoire suivant une loi gaussienne. Déterminer l'espérance et la variance de X sachant que
$$\begin{cases} P(X<-1) & \simeq & 0,05 \\ P(X>3) & \simeq & 0,12. \end{cases}$$

Exercice 2 Une usine fabrique des billes de diamètre 8mm. Les erreurs d'usinage provoquent des variations de diamètre. On estime, sur les données antérieures, que l'erreur est une variable aléatoire qui obeit une loi normale les paramètres étant : moyenne : 8mm, écart-type : 0.02mm. On rejette les pièces dont le diamètre n'est pas compris entre 7.97mm et 8.03mm. Quelle est la proportion de billes rejetées ?

Exercice 3 Des machines fabriquent des plaques de tôle destinées à être empilées.

1. Soit X la variable aléatoire "épaisseur de la plaque en mm" ; on suppose que X suit une loi normale de paramètres $m=0.3$ et $\sigma^2=0.1$. Calculez la probabilité pour que X soit inférieur à 0.36mm et la probabilité pour que X soit compris entre 0.25 et 0.35mm.
2. L'utilisation de ces plaques consiste à en empiler n, numérotées de 1 à n en les prenant au hasard : soit X_i la variable aléatoire "épaisseur de la plaque numéro i en mm" et Z la variable aléatoire "épaisseur des n plaques en mm". Pour $n=20$, quelle est la loi de Z, son espérance et sa variance ?

Exercice 4 Sur un grand nombre de personnes on a constaté que la répartition du taux de cholestérol suit une loi normale avec les résultats suivants :
- 56 ont un taux inférieur 165 cg ;
- 34 ont un taux compris entre 165 cg et 180 cg ;
- 10 ont un taux suprieur 180 cg.

Quelle est le nombre de personnes qu'il faut prévoir de soigner dans une population de 10 000 personnes, si le taux maximum toléré sans traitement est de 182 cg ?

Exercice 5 Une usine fabrique des appareils électroniques constitués de deux composants A et B dont les fonctionnements sont indépendants l'un de l'autre et dont les durées de vie (en heures) sont des variables aléatoires X_1 et X_2 qui suivent une loi exponentielle de paramètre respectif λ_1 et λ_2.

1. On a observé que la durée de vie moyenne des composants de type A est de 1000 heures. Que vaut λ_1 ?
2. On a observé que, en moyenne, un composant sur deux de type B avait une durée de vie inférieure ou égale 1500 heures, et un sur deux avait une durée de vie supérieure ou égale 1500 heures. Que vaut λ_2 ?
3. Un appareil fonctionne si et seulement si ses deux composants fonctionnent. On note T la durée de vie d'un appareil. Pour x un réel strictement positif, exprimer $P(T>x)$ en fonction de $P(X_1>x)$ et de $P(X_2>x)$.
4. En déduire $P(T\leq x)$ en fonction de λ_1, de λ_2 et de x, puis reconnaitre la loi de T.
5. Sachant que la durée de vie de l'appareil dépasse l'espérance de vie du premier composant, quelle est la probabilité que la durée de vie de l'appareil dépasse l'espérance de vie du deuxième composant ?
6. Sachant que la durée de vie de l'appareil dépasse l'espérance de vie du deuxième composant, quelle est la probabilité que la durée de vie de l'appareil dépasse l'espérance de vie du premier composant ?